



CHƯƠNG I: DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§ 1: PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Nếu chúng mình mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n , ta thực hiện như sau:

- Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.
- Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương $n = k$ tùy ý ($k \geq 1$), chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề $A(n)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n \geq p$ thì:

- + Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$;
- + Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

2. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài tập 1: Chứng minh: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Giải

Bước 1: Khi $n = 1$, vế trái chỉ có một số hạng bằng 1, vế phải bằng 1^2 , vậy hệ thức (1) đúng.

Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \text{ (giả thiết quy nạp)}$$

Ta chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2 \quad (*)$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

vế trái của (*): $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = k^2 + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$ = vế phải của (*)

Vậy hệ thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$: $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Giải

Với $n = 1$, ta có: $1^3 + 11 \cdot 1 = 12$ chia hết cho 6.

Ta phải chứng minh tính chất đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$(k + 1)^3 + 11(k + 1) = k^3 + 11k + 12 + 3k(k + 1).$$

Vì $k^3 + 11k + 12$ chia hết cho 6 và $k(k + 1)$ là số chẵn nên $3k(k + 1)$ chia hết cho 6.

$\Rightarrow k^3 + 11k + 12 + 3k(k + 1)$ chia hết cho 6 hay tính chất đúng với $n = k + 1$.

Vậy tính chất trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

d) $1.4 + 2.7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

e) $1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

f) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $2^n > 2n+1 \quad (n \geq 3)$

b) $2^{n+2} > 2n+5$

c) $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

e) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (n > 1)$

3. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

b) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

c) $7 \cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

d) $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

e) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.

f) $13^n - 1$ chia hết cho 6.

§ 2. DÃY SỐ

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1.1. Định nghĩa dãy số

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là **một dãy số vô hạn** (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

Dạng khai triển: $(u_n) = u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

Ví dụ 1:

Dãy các số tự nhiên lẻ 1,3,5,7, ... có số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng tổng quát $u_n = 2n - 1$

1.2. Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là **một dãy số hữu hạn**.

Dạng khai triển: $(u_n) = u_1, u_2, \dots, u_n$. Trong đó u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng cuối.

Ví dụ 2:

Dãy các số tự nhiên chẵn 2,4,6,8,10,12 có số hạng đầu $u_1 = 2$, số hạng cuối $u_6 = 12$

2. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

2.1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

Ví dụ 3: Cho dãy số

$$u_n = \frac{3^n}{n} \quad (1)$$

Từ công thức (1), ta có thể xác định được bất kỳ số hạng nào của dãy số.

Dạng khai triển:

$$3; \frac{9}{2}; 9; \frac{81}{4}; \dots; \frac{3^n}{n}; \dots$$

2.2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

Ví dụ 4: Số π là số thập phân vô hạn không tuần hoàn

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589 \dots$$

Nếu lập dãy số (u_n) với u_n là giá trị gần đúng thiếu của số π với sai số tuyệt đối 10^{-n} thì

$$u_1 = 3,1; u_2 = 3,14; u_3 = 3,141; u_4 = 3,1415; \dots$$

Đó là dãy số được cho bằng *phương pháp mô tả*, trong đó chỉ ra cách viết các số hạng liên tiếp của dãy.

2.3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Ví dụ 5: Dãy Phi – bô – na – xi là dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases} \quad \text{với } n \geq 3,$$

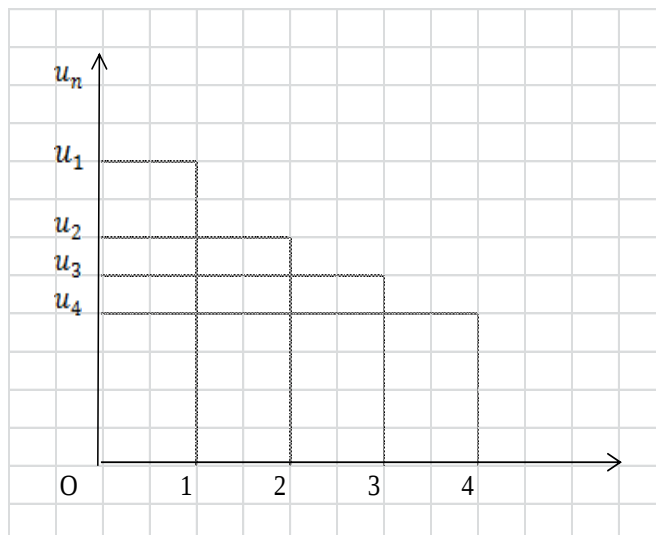
Nghĩa là, kể từ số hạng thứ ba trở đi, mỗi số hạng đều bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó.

Cách cho dãy số như trên được gọi là cho bằng *phương pháp truy hồi*.

3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA DÃY SỐ

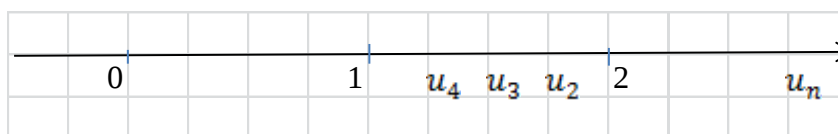
Vì dãy số là một hàm số trên $\mathbb{N}^*$ nên ta có thể biểu diễn dãy số bằng đồ thị. Khi đó trong mặt phẳng tọa độ, dãy số được biểu diễn bằng các điểm có tọa độ $(n; u_n)$.

Ví dụ 6: Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{n}$ có thể biểu diễn hình học như sau:



$$u_1 = 2; u_2 = \frac{3}{2}; u_3 = \frac{4}{3}; u_4 = \frac{5}{4}$$

Tuy nhiên người ta thường biểu diễn các số hạng của một dãy số trên trục số, như sau:



4. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

4.1. Dãy số tăng, dãy số giảm

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ($u_n > 0$).
- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ($u_n > 0$).

4.2. Dãy số bị chặn

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} : u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài tập 1: Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi công thức:

$$u_n = \frac{n}{2^n - 1}$$

Giải

$$u_1 = \frac{1}{2^1 - 1} = 1; u_2 = \frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{3}{2^3 - 1} = \frac{3}{7}; u_4 = \frac{4}{2^4 - 1} = \frac{4}{15}; u_5 = \frac{5}{2^5 - 1} = \frac{5}{31}$$

Bài tập 2: Tìm số hạng tổng quát của dãy số:

a) $(u_n): 1; 2; 4; 8; 16.$

b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Giải

a) Ta thấy:

$$u_1 = 1 = 2^{1-1}; u_2 = 2 = 2^{2-1}; u_3 = 4 = 2^{3-1}; u_4 = 8 = 2^{4-1}; u_5 = 16 = 2^{5-1} \Rightarrow u_n = 2^{n-1}$$

Vậy dãy (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2^{n-1}$.

b) Ta thấy $u_1 = 3; u_2 = 2u_1 = 2.3 = 3.2^1; u_3 = 2u_2 = 2.6 = 3.2^2; u_4 = 2u_3 = 2.12 = 3.2^3$

Vậy dãy (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 3.2^{n-1}$

BÀI TẬP

1. Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$

b) $u_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + 1}$

c) $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

d) $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

e) $u_n = n + \cos^2 n$

f) $u_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$

2. Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1)$

b) $u_1 = 15, u_2 = 9, u_{n+2} = u_n - u_{n+1}$

c) $u_1 = 0, u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 1}$

d) $u_1 = 1, u_2 = -2, u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n$

3. Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) , dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng qui nạp:

$$\text{a) } u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 3 \quad \text{b) } u_1 = 3, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$$

$$\text{c) } u_1 = 3, u_{n+1} = 2u_n$$

$$\text{d) } u_1 = -1, u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{e) } u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + 7$$

$$\text{e) } u_1 = \frac{5}{4}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$$

4. Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) cho bởi:

$$\text{a) } u_n = \frac{2n+1}{3n-2} \quad \text{b) } u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5} \quad \text{c) } u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$$

$$\text{d) } u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1} \quad \text{e) } u_n = n + \cos^2 n \quad \text{f) } u_n = \frac{2-n}{\sqrt{n}}$$

5. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

$$\text{a) } u_n = \frac{2n+3}{n+2} \quad \text{b) } u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{c) } u_n = n^2 + 4$$

$$\text{d) } u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1} \quad \text{e) } u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + n}} \quad \text{f) } u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$$

§3. CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

$$(u_n) \text{ là cấp số cộng } \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^* (d: \text{công sai})$$

2. Số hạng tổng quát

Định lý 1: Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geq 2$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng

Định lý 2: Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Định lý 3: Cho cấp số cộng (u_n) . Ta có

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

4. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài tập : Xác định cấp số cộng (u_n) biết:

$$u_5 = 19; u_9 = 35$$

Giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19(1) \\ u_1 + 8d = 35(2) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ đi (1): $4d = 16 \Rightarrow d = 4$.

Thế vào (1): $u_1 = 3$. Vậy $u_1 = 3, d = 4$.

BÀI TẬP

1. Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, khi đó cho biết số hạng đầu và công sai của nó:

a) $u_n = 3n - 7$

b) $u_n = \frac{3n+2}{5}$

c) $u_n = n^2$

d) $u_n = 3^n$

e) $u_n = \frac{7-3n}{2}$

f) $u_n = \frac{n}{2} - 1$

2. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_3 = -15 \\ u_{14} = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -12 \\ u_1 u_2 u_3 = 8 \end{cases}$

3. a) Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.

b) Giữa các số 4 và 67 hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.

4. a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng là 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 66.

5. a) Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo các góc đó.

b) Số đo các góc của một đa giác lồi có 9 cạnh lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 3^\circ$. Tìm số đo của các góc đó.

c) Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Tìm số đo các góc đó.

6. Chứng minh rằng nếu 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì các số x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng, với:

a) $x = b^2 + bc + c^2; y = c^2 + ca + a^2; z = a^2 + ab + b^2$

b) $x = a^2 - bc; y = b^2 - ca; z = c^2 - ab$

7. Tìm x để 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng, với:

a) $a = 10 - 3x; b = 2x^2 + 3; c = 7 - 4x$ b) $a = x + 1; b = 3x - 2; c = x^2 - 1$

§4. CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . Số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân } \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^* (q: \text{ công bội})$$

2. Số hạng tổng quát

Định lý 1: Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, \text{ với } n \geq 2$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

Định lý 2: Trong một cấp số nhân, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}; \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân

Định lý 3: Cho cấp số nhân (u_n) . Ta có

$$\begin{cases} S_n = nu_1 & \text{với } q = 1 \\ S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{với } q \neq 1 \end{cases}$$

5. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài tập : Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 72 \\ u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q \cdot (q^2 - 1) = 72 & (1) \\ u_1 q^2 \cdot (q^2 - 1) = 144 & (2) \end{cases}$$

Chia (2) cho (1) ta có: $q = 2$.

Thế vào (1) ta có: $u_1 = \frac{72}{2 \cdot (2^2 - 1)} = 12$. Vậy $u_1 = 12; q = 2$.

BÀI TẬP

1. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$\text{a) } \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$$

2. a) Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

b) Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

3. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

4. a) Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

b) Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

5. a) Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

b) Độ dài các cạnh của ΔABC lập thành một cấp số nhân.

Chứng minh rằng ΔABC có hai góc không quá 60° .

6. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

7. Số số hạng của một cấp số nhân là một số chẵn. Tổng tất cả các số hạng của nó lớn gấp 3 lần tổng các số hạng có chỉ số lẻ. Xác định công bội của cấp số đó.

8. Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

9. Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

10. Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

11. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

12. Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y-z}$ lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$; ta có:

- a) $3n^3 + 15n$ chia hết cho 9.
- b) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7;
- c) $13^n - 1$ chia hết cho 6.

2. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ (với $n \geq 1$). Viết năm số hạng đầu tiên của dãy.

3. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) , biết:

$$\text{a) } \begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$$

4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$\text{a) } \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$$

CHƯƠNG II. GIỚI HẠN

§ 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1.1. Định nghĩa 1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ hay } u_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty$$

Như vậy, (u_n) có giới hạn là 0 khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn n đủ lớn.

1.2. Định nghĩa 2. Ta nói dãy (v_n) có giới hạn là số a (hay v_n dần tới a) khi $n \rightarrow +\infty$, nếu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0.$$

Kí hiệu:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a \text{ hay } v_n \rightarrow a \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

1.3. Một vài giới hạn đặc biệt

Từ định nghĩa suy ra các kết quả sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$; với k nguyên dương;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$.

▪ **Ghi chú**

Từ nay về sau thay cho viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, ta có thể viết tắt là: $\lim u_n = a$.

2. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Việc tính giới hạn bằng định nghĩa khá phức tạp nên người ta thường áp dụng các công thức giới hạn đặc biệt nêu trên và định lý sau đây mà ta thừa nhận.

Định lý 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$
- $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{a}{b}$ (Nếu $b \neq 0$)

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cho cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q , với $|q| < 1$ **tổng của cấp số nhân lùi vô hạn** (u_n) là:

$$S = \frac{u_1}{1 - q}$$

Chẳng hạn: Hai dãy số sau đây là những cấp số nhân lùi vô hạn:

- Dãy số: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ với công bội $q = \frac{1}{2}$;
- Dãy số: $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots, \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \dots$ với công bội $q = -\frac{1}{3}$.

Ví dụ 1:

a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , với $u_n = \frac{1}{3^n}$.

b) Tính tổng: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$

Giải

a) Vì $u_n = \frac{1}{3^n} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3}$. Do đó

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

b) Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$.

Vậy

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC

4.1. Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu:

$$\lim u_n = +\infty \text{ hay } u_n \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu:

$$\lim u_n = -\infty \text{ hay } u_n \rightarrow -\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Nhận xét

$$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty.$$

4.2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận định lí dưới đây:

- a) $\lim n^k = +\infty$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
 b) $\lim q^n = +\infty$ nếu ($q > 1$)

4.3. Định lí

Định lí 2

- a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$
 b) Nếu $\lim u_n = a > 0$; $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$
 c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim (u_n \cdot v_n) = +\infty$

5. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài tập 1: Tính

$$\lim \frac{5n + 7}{-2n + 1}$$

Giải

Chia cả tử số và mẫu số cho n , ta được

$$\frac{5n + 7}{-2n + 1} = \frac{5 + \frac{7}{n}}{-2 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{Vì } \lim \left(5 + \frac{7}{n}\right) = \lim 5 + \lim \frac{7}{n} = 5 + 0 = 5$$

$$\text{Và } \lim \left(-2 + \frac{1}{n}\right) = \lim(-2) + \lim \frac{1}{n} = -2 + 0 = -2$$

$$\text{nên } \lim \frac{5n + 7}{-2n + 1} = \lim \frac{5 + \frac{7}{n}}{-2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim \left(5 + \frac{7}{n}\right)}{\lim \left(-2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{5}{-2}$$

Bài tập 2: Tính

$$\lim \frac{3n^2 - n}{n^2 + 1}$$

Giải

Chia cả tử số và mẫu số cho n^2 , ta được

$$\frac{3n^2 - n}{n^2 + 1} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1}$$

Vì $\lim \left(3 - \frac{1}{n}\right) = \lim 3 - \lim \frac{1}{n} = 3 - 0 = 3$

Và $\lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1\right) = \lim \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{1}{n} + \lim 1 = 0 \cdot 0 + 1 = 1$

nên $\lim \frac{3n^2 - n}{n^2 + 1} = \lim \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1} = \frac{\lim \left(3 - \frac{1}{n}\right)}{\lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1\right)} = \frac{3}{1} = 3$

Bài tập 3: Tính

$$\lim \frac{\sqrt{1 + 4n^2}}{1 - 2n}$$

Giải

Ta có:

$$\lim \frac{\sqrt{1 + 4n^2}}{1 - 2n} = \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n^2} + 4\right)}}{1 - 2n} = \lim \frac{n \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4}}{n \cdot \left(\frac{1}{n} - 2\right)} = \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 4}}{\left(\frac{1}{n} - 2\right)} = \frac{2}{-2} = -1$$

Bài tập 4: Tính

$$\lim \frac{2n + 5}{n \cdot 3^n}$$

Giải

Chia cả tử và mẫu cho n , ta được

$$\frac{2n + 5}{n \cdot 3^n} = \frac{2 + \frac{5}{n}}{3^n}$$

Vì $\lim \left(2 + \frac{5}{n}\right) = 2$; $\lim(3^n) = +\infty \Rightarrow \lim \frac{2n+5}{n \cdot 3^n} = \lim \frac{2+\frac{5}{n}}{3^n} = 0$.

Bài tập 5: Tính

$$\lim(n^2 - 2n - 1)$$

Giải

Ta có

$$n^2 - 2n - 1 = n^2 \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Vì } \lim n^2 = +\infty; \lim \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \lim(n^2 - 2n - 1) = \lim n^2 \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = +\infty.$$

BÀI TẬP

1. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim \frac{6n - 1}{3n + 2};$$

$$b) \lim \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1};$$

$$c) \lim \frac{3^n + 5 \cdot 4^n}{4^n + 2^n};$$

$$d) \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$$

2. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim(n^3 + 2n^2 - n + 1);$$

$$b) \lim(-n^2 + 5n - 2);$$

$$c) \lim(\sqrt{n^2 - n} - n);$$

$$d) \lim(\sqrt{n^2 - n} + n).$$

3. Tính

$$S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \cdots$$

4. Tính

$$S = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots$$

5. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 1,020\,202\,\dots$ (chu kì 02). Hãy viết a dưới dạng một phân số.

§ 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1.1. Định nghĩa

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là L (khi x dần tới x_0 , nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ ta có $f(x_n) \rightarrow L$).

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Nhận xét:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c \text{ là hằng số})$$

1.2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Ta thừa nhận định lí sau đây:

Định lí 1:

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, ta có:

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; \quad (M \neq 0)$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x \neq x_0$).

1.3. Giới hạn một bên

Định nghĩa 2:

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x_n \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x_n \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất

Kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Ta thừa nhận định lí sau:

Định lí 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x + 2 & \text{nếu } x \geq 1 \\ x^2 - 3 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

Tìm

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \quad \text{và } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ (nếu có).}$$

Giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3) = 1^2 - 3 = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x + 2) = 7.$$

Như vậy

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ không tồn tại.}$$

2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

2.1. Định nghĩa 3:

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Chú ý:

Với c, k là hằng số, $k \in \mathbb{N}^*$, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

Ví dụ 3: Tính

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}$$

Giải

Chia cả tử và mẫu cho x^2 , ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3 \end{aligned}$$

3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

3.1. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Nhận xét:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty$$

3.2. Một vài giới hạn đặc biệt

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k số lẻ
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn

3.3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

3.4. Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm \infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$		$+\infty$	$-\infty$
		$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp

$$x \rightarrow x_0^+; x \rightarrow x_0^-; x \rightarrow +\infty; x \rightarrow -\infty$$

4. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài tập 1: Tính

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$$

Giải

Theo định lí về giới hạn ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 1}{\lim_{x \rightarrow 3} 2\sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x}} = \frac{3 \cdot 3 + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Bài tập 2: Tính

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$$

Giải

Vì $(x - 1) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow 1$, nên ta chưa thể áp dụng được định lí nêu trên.

Nhưng với $x \neq 1$ ta có

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = x + 4$$

Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4) = 5.$$

Bài tập 3: Tính

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)$$

Giải

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = -\infty.$$

Ví dụ 4: Tính

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}$$

Giải

a) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0, x - 1 < 0 \text{ với mọi } x < 1 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 3) = 2.1 - 3 = -1 < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1} = +\infty.$$

b) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0, x - 1 > 0 \text{ với mọi } x > 1 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = 2.1 - 3 = -1 < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty.$$

BÀI TẬP

1. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6};$$

2. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 5}{(x - 2)^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 7}{x - 1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 7}{x - 1};$$

3. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{5 - 2x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5)$$

4. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^4 - x^3 + x^2 + x - 2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 7}{x^2 + 1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x}}{x - 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{2x};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x);$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{5 - 2x};$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1)$$

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục tại x_0** nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2

*. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu hàm số liên tục tại x_0 , $\forall x_0 \in (a; b)$

*. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ và } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
- Giả sử các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại x_0 thì
 - Hàm số $y = f(x) + g(x)$; $y = f(x) - g(x)$; $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0
 - Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_0 (nếu $g(x) \neq 0$)
- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$

4. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài toán 1: Hàm số liên tục tại một điểm

Phương pháp:

Để chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục tại một điểm x_0 , ta qua 3 bước sau đây:

B_1 : Tính $f(x_0)$

B_2 : Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

B_3 : So sánh $f(x_0)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$

Bài tập 1: Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 2$

Giải

Ta có:

$$* \text{Tính } f(x_0) = f(2) = 4$$

$$* \text{Tính } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Do đó:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

Vậy $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2$

Bài tập 2: Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 1, & x < 1 \\ 3x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$

Giải

Ta có:

$$* \text{Tính } f(x_0) = f(1) = 3.1 + 2 = 5$$

$$* \text{Tính } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 2) = 3.1 + 2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - x + 1) = 1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ không tồn tại

Vậy $f(x)$ không liên tục tại điểm $x = 1$

Bài tập 4 : Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x}{x-2}$ tại $x_0 = 3$.

Giải

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Do đó xác định trên khoảng $(2; +\infty)$ chứa $x_0 = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-2} = 3 = f(3)$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 3$.

Bài toán 2: Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

Phương pháp:

1/ Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b) \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $(a; b)$.

2/ / Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Bài tập 4: Xét tính liên tục của hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3}; & x \neq 3 \\ 4; & x = 3 \end{cases}$

trên tập xác định của nó.

Giải

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là : $D = \mathbb{R}$

- Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$

Vì $f(x)$ là thương của 2 đa thức, đồng thời mẫu số $x - 3 \neq 0; \forall x \neq 3$ nên $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$

- Tại $x = 3$. Ta có $f(3) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) = 4$$

Do đó:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

Suy ra $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 3$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-2x}{x-1}; & x \neq 1 \\ 5; & x = 1 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

Giải

Tập xác định của hàm số là: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Nếu $x \neq 1$, thì $f(x) = \frac{2x^2-2x}{x-1}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

- Nếu $x = 1$ ta có $f(x) = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1).$$

Suy ra hàm số đã cho không liên tục tại $x = 1$.

Kết luận: Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$; $(1; +\infty)$ và gián đoạn tại $x = 1$.

Bài toán 3: Chứng minh phương trình có nghiệm nhờ tính liên tục của hàm số

Phương pháp:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$

Bài tập 6: Chứng minh rằng phương trình: $x^3 + 3x^2 + 5x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0; 1)$

Giải

Xét hàm số: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$

Ta có $f(x)$ là đa thức nên liên tục trên đoạn $[0; 1]$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 8 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.

Bài tập 7: Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) = -5 \\ f(2) = 7 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) < 0.$$

$y = f(x)$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó, nó liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0; 2)$.

BÀI TẬP

1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 2$, biết

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}; & x \neq 2 \\ 5; & x = 2 \end{cases}$$

2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 1$, biết

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x+1}; & x \neq 1 \\ -1; & x = 1 \end{cases}$$

3. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & x < 0 \\ a + x; & x \geq 0 \end{cases}$$

Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

4. Tìm a để hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}; & x \neq 1 \\ 3x + 3; & x = 1 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 1$.

5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của nó, biết

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}; & x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}; & x = \sqrt{2} \end{cases}$$

6. Chứng minh rằng phương trình: $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên khoảng $(-1; 1)$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{8n+1}{2n+5};$

b) $\lim \frac{n^3+n-2}{2n^3-1};$

c) $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2};$

d) $\lim (\sqrt{n^2+5n-1}-n);$

e) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}};$

f) $\lim \frac{2^n-75^n}{5^n+3^n};$

2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x-1}{2x+9};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3+3x+1}{2x^3-1};$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-7x+1);$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5x-1}-x);$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^2-10x+5}{x-1};$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2+2x}{x+2};$

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{9+x+x^2};$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x};$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3+x^2-2x+1);$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1};$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{3x-1};$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+2}{3x+7};$

4. Xét tính liên tục trên $\mathbb{R}$ của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}; & x > 2 \\ 5-x; & x \leq 2 \end{cases}$$

5. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}; & x \neq 3 \\ a; & x = 3 \end{cases}$$

Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

6. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$

Chương III. ĐẠO HÀM

§ 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

1. ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1.1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là **đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0** và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

CHÚ Ý:

Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại x_0 .

Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là **số gia tương ứng của hàm số**. Như vậy:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1.2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Quy tắc:

Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0 , tính:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Bước 2: Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3: Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 1$

Giải

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 1$

Ta có: $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$

$$= \frac{1}{1 + \Delta x} - 1 = \frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1 + \Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \Delta x} = -1$$

Vậy $f'(1) = -1$

1.3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Định lý 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó. Ta có:

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng với hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

1.4. Phương trình tiếp tuyến:

Định lý 2

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

Ví dụ 3: Cho parabol $y = -x^2 + 3x - 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

Giải

Ta có: $x_0 = 2$

$$y_0 = y(2) = 0.$$

Bằng định nghĩa ta tính được: $y'(x_0) = y'(2) = -1$

Vậy phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm $M_0(2; 0)$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y - 0 = (-1).(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

2. ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

2.1. Định nghĩa:

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó ta gọi hàm số :

$$f': (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

Là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$; kí hiệu là y' hay $f'(x)$.

Ví dụ 4:

Hàm số $y = x^2$ có đạo hàm $y' = 2x$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

BÀI TẬP

1. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm đã chỉ ra :

a) $y = x^2 - 3x$ tại $x_0 = 2$

b) $y = x^3 + 1$ tại $x_0 = -2$

c) $y = \frac{2}{x}$ tại $x_0 = 3$

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$.

a) Tại điểm $(-1; -1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2;

c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 1$

a) Tại điểm $(-1; 0)$

b) Tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$

c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 12

4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{2}{x}$

d) Tại điểm $(-1; -2)$

e) Tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$

f) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 8

§2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm của một số hàm thường gặp

Định lí 1

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và
 $(x^n)' = nx^{n-1}$

Nhận xét :

- Đạo hàm của hàm hằng bằng 0 : $(C)' = 0$

- Đạo hàm của hàm số $y = x$ bằng 1 : $(x)' = 1$

Định lí 2

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Định lí 3: Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có :

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

Bằng quy nạp toán học ta chứng minh được :

$$(u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \dots \pm u_n'$$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm các hàm số :

a) $y = x^3 + x^2 - x^5$

b) $y = \frac{x^2 + x}{x - 1}$

Giải

a) Ta có : $(x^3 + x^2 - x^5)' = (x^3)' + (x^2)' - (x^5)' = 3x^2 + 2x - 5x^4$

b) Ta có :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x}} \right)' &= \frac{(x^2 - 1)' x\sqrt{x} - (x^2 - 1)(x\sqrt{x})'}{(x\sqrt{x})^2} \\
 &= \frac{2x^2\sqrt{x} - (x^2 - 1)(1\sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}})}{x^3} \\
 &= \frac{2x^2\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} - \frac{x^2\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}}{x^3} \\
 &= \frac{x^2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{2x^3}
 \end{aligned}$$

2. Hệ quả:

1. $(ku)' = ku'$ (k là hằng số)
2. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$)

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm của hàm số: $y = \frac{5}{1-2x^2}$

Giải

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{5}{1-2x^2} \right)' = 5 \left(\frac{1}{1-2x^2} \right)' \\
 &= 5 \left(-\frac{(1-2x^2)'}{(1-2x^2)^2} \right) = 5 \left(-\frac{(-4x)}{(1-2x^2)^2} \right) = \frac{20x}{(1-2x^2)^2}
 \end{aligned}$$

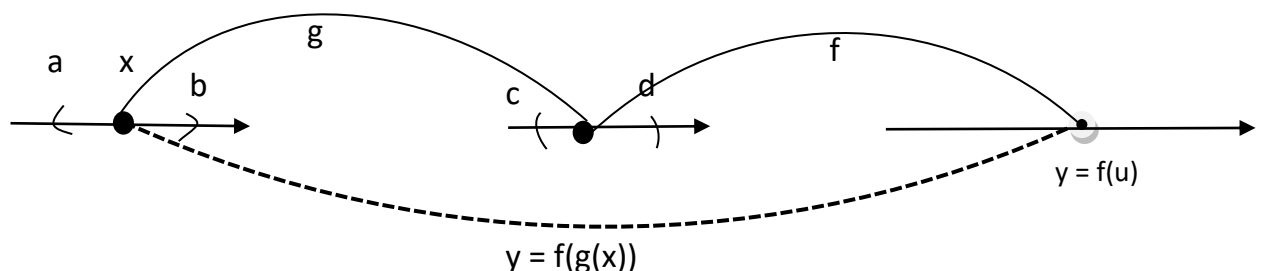
3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

3.1. Hàm hợp:

Giả sử hàm số $u = g(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c;d)$; Hàm số $y = f(u)$ xác định trên $(c;d)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta lập một hàm số xác định trên khoảng $(a;b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc:

$$x \rightarrow f(g(x))$$

Ta gọi $y = f(g(x))$ là hàm hợp của hàm $y = f(u)$ với hàm $u = g(x)$.



Ví dụ 3: Hàm số $y = \sin(2x + 3)$ là hàm hợp của hàm số $y = f(u) = \sin u$ và hàm số $u = g(x) = 2x + 3$

3.2. Đạo hàm của hàm hợp

Định lí 4. Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sin(2x + 3)$ (xem $u = 2x + 3$)

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } y' &= (\sin(2x + 3))' = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)'_x \\ &= \cos(2x + 3) \cdot 2 \\ &= 2 \cos(2x + 3).\end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 9$

b) $y = 4x^5(x^3 - 2x^2 + 5)$

c) $y = (2x^4 + 9x)\sqrt{x}$

d) $y = \frac{4 + 2x^2}{3x - 1}$

e) $y = \sqrt{3x^2 - 2x}$

f) $y = \frac{1 + 2x}{\sqrt{4 + x^2}}$

g) $y = (1 + x)^4$

h) $y = \frac{7}{2 + x^2}$

2. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$

a) Tìm $y'(-3)$

b) Tìm x để $y' > 0$

§ 3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$

Định lí 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ví dụ 1: Tính

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

Giải: Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Định lí 2

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và
 $(\sin x)' = \cos x$

Chú ý:

Nếu $u = u(x)$ thì $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

Ví dụ 2:

Tính đạo hàm: $(\sin(x^2 + 1))' = (x^2 + 1)' \cos(x^2 + 1) = 2x \cdot \cos(x^2 + 1)$

3. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Định lí 3

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và
 $(\cos x)' = -\sin x$

Chú ý:

Nếu $u = u(x)$ thì $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm:

$$(\cos(3x))' = -(3x)' \cdot \sin(3x) = -3 \cdot \sin(3x).$$

4. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

Định lí 4

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Chú ý:

Nếu $u = u(x)$ thì

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm: $(\tan(2x + \frac{\pi}{3}))' = \frac{(2x + \frac{\pi}{3})'}{\cos^2(2x + \frac{\pi}{3})} = \frac{2}{\cos^2(x + \frac{\pi}{3})}$

5. Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

Định lí 5

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Chú ý:

Nếu $u = u(x)$ thì

$$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm :

$$(\cot(3x - \frac{\pi}{4}))' = -\frac{(3x - \frac{\pi}{4})'}{\sin^2(3x - \frac{\pi}{4})} = -\frac{3}{\sin^2(3x - \frac{\pi}{4})}$$

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(u^n)' = nu^{n-1}$ $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(\sin u)' = u' \cos u$ $(\cos u)' = -u' \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
---	---

BÀI TẬP

1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau đây:

$$a) y = \frac{x-1}{5x-2};$$

$$b) y = \frac{2x+3}{7-3x};$$

$$c) y = \frac{4}{x-3}$$

2. Tìm đạo hàm các hàm số lượng giác sau :

$$a) y = \sin 3x - \cos \frac{x}{2}$$

$$e) y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$b) y = \frac{\sin x - 2 \cos x}{\cos 5x + \sin x}$$

$$f) y = \cot x^3$$

$$c) y = \sqrt{1 + \tan x}$$

$$g) y = \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2(\frac{\pi}{3} - x) + \sin^2(\frac{2\pi}{3} + x)$$

$$d) y = \sin^2 x$$

§4. VI PHÂN

1. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x .

Ta gọi $f'(x) \cdot \Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx . Kí hiệu là $df(x)$ hoặc dy , nghĩa là :

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

Chú ý:

Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y = x$

$$\text{Ta có : } dx = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

Do đó, với hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$dy = df(x) = f'(x) dx$$

Ví dụ 1: Tìm vi phân hàm số sau:

$$a) y = x^3 + 3x^2 - 5x$$

$$b) y = \cos^2 x$$

Giải

$$a) y = x^3 + 3x^2 - 5x \rightarrow y' = 3x^2 + 6x - 5$$

$$\text{Vậy: } dy = (3x^2 + 6x - 5)dx$$

$$b) y = \cos^2 x \rightarrow y' = -2\sin x \cdot \cos x = \sin(2x)$$

$$\text{Vậy: } dy = \sin(2x)dx.$$

2. Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng

Theo định nghĩa của đạo hàm, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Do đó $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0) \Rightarrow \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

Từ đó, ta có $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$

Hay ta có công thức tính gần đúng đơn giản nhất.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Ví dụ 2: Tính giá trị gần đúng của $\sqrt{3,99}$.

Giải: Đặt

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Theo công thức gần đúng, với $x_0 = 4$; $\Delta x = -0,01$ ta có

$$f(3,99) = f(4 - 0,01) \approx f(4) + f'(4)(-0,01)$$

Tức là: $\sqrt{3,99} = \sqrt{4 - 0,01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-0,01) = 1,9975$

BÀI TẬP

1. Tìm vi phân của các hàm số sau:

$$a) y = \frac{x-4}{-x+2};$$

$$b) y = \frac{-x-3}{7-8x};$$

$$c) y = \frac{-5}{2x-3};$$

$$d) y = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$$

2. Tìm dy, biết:

$$a) y = \tan^2 x$$

$$b) y = 4x^3 - 2x^2 + 4$$

$$c) y = \cos^3 x - \sin 2x$$

Chương I: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN VỀ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

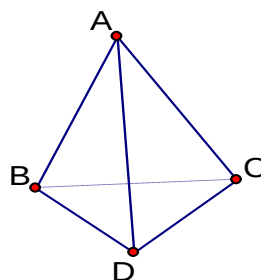
Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A , điểm cuối là B ta có một vector, được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

1.1. Định nghĩa

Vector trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vector có điểm đầu A , điểm cuối B . Vector còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

❖ **Chú ý:** Các khái niệm liên quan được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

Ví dụ 1: Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vector có điểm đầu là A và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện. Các vector đó có cùng nằm trong mặt phẳng không ?

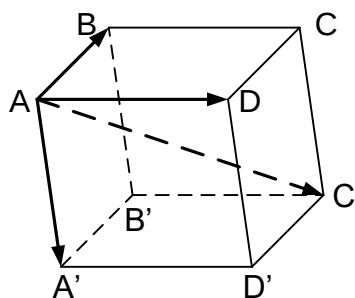


Giải

Các vector có điểm đầu là A và điểm cuối là các đỉnh còn lại của tứ diện: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Các vector trên không cùng nằm trong mặt phẳng.

Ví dụ 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy kể tên các vector có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vector $\overrightarrow{AB}$.



1.2. Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian

Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian được định nghĩa như trong mặt phẳng.

❖ Quy tắc 3 điểm:

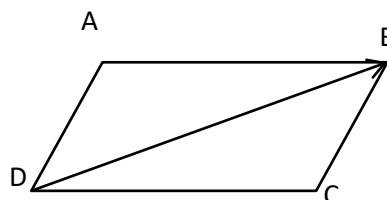
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

❖ Quy tắc trừ:

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

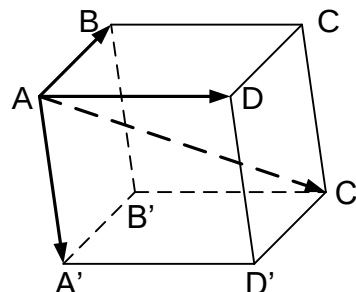
❖ Quy tắc hình bình hành:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



❖ Quy tắc hình hộp:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$



Ví dụ 3: Cho tứ diện ABCD. Chứng minh: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Giải

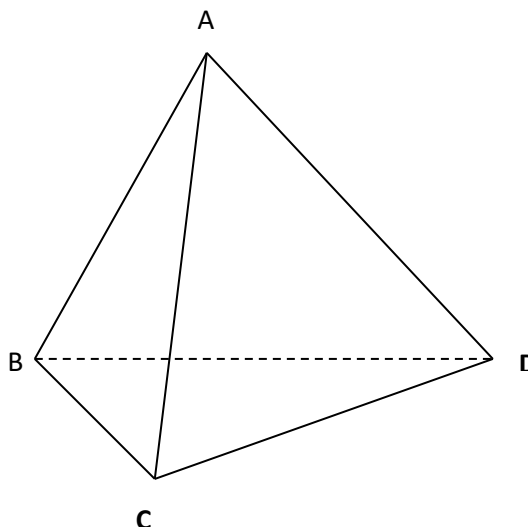
Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

Do đó, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$

$$= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$



1.3. Phép nhân vectơ với một số

Trong không gian, tích của vectơ $\vec{a}$ với một số $k \neq 0$ là vectơ $k\vec{a}$.

Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

Ví dụ 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, và G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$

Do đó: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$

Vì M là trung điểm của đoạn AD nên

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Vậy: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) Ta có

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$,

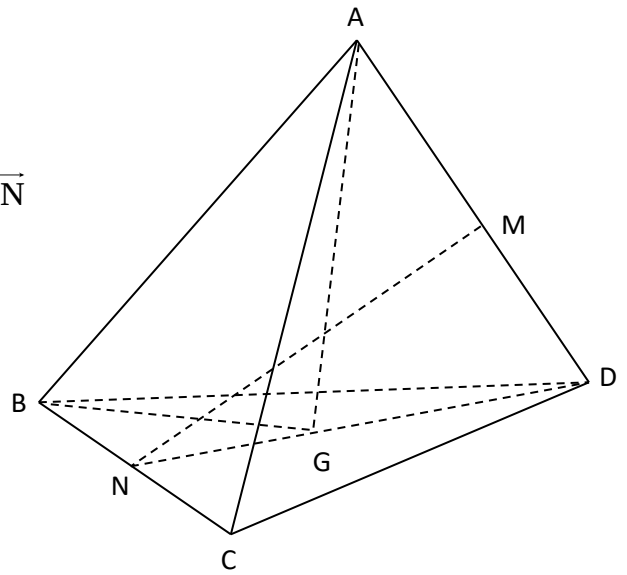
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}$,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Do đó ta suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

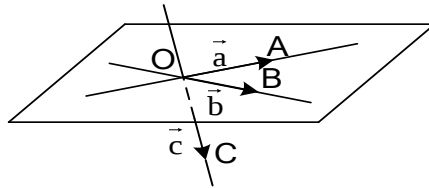


2. ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẪNG CỦA BA VECTOR

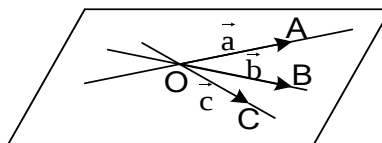
2.1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vector trong không gian

Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

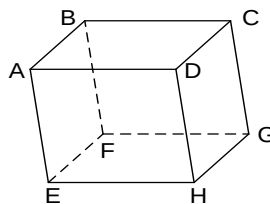
- Nếu các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, khi đó ta nói rằng *ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng*.



- Nếu các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng, khi đó ta nói rằng *ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng*.



Ví dụ 5: Cho hình hộp ABCD.EFGH. Hãy chỉ ra bộ ba các vector đồng phẳng ?

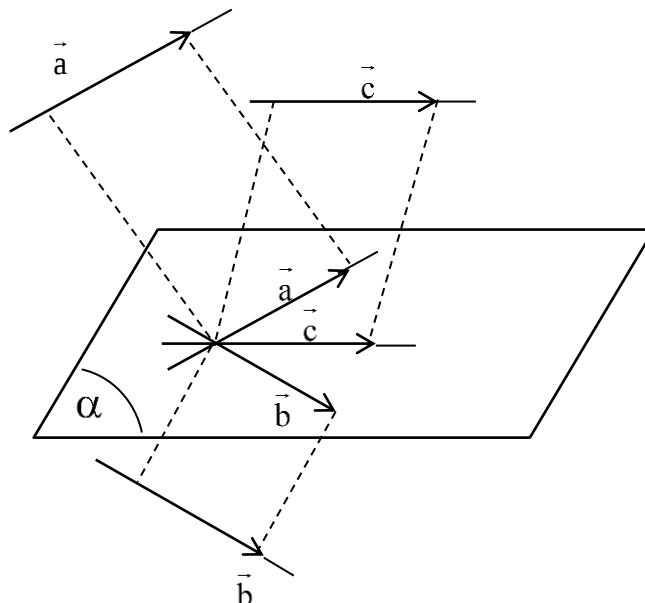


Hướng dẫn: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EG}$, ...

- Chú ý:** Việc xác định sự đồng phẳng hay không đồng phẳng của ba vector không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

2.2. Định nghĩa

Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một phẳng.

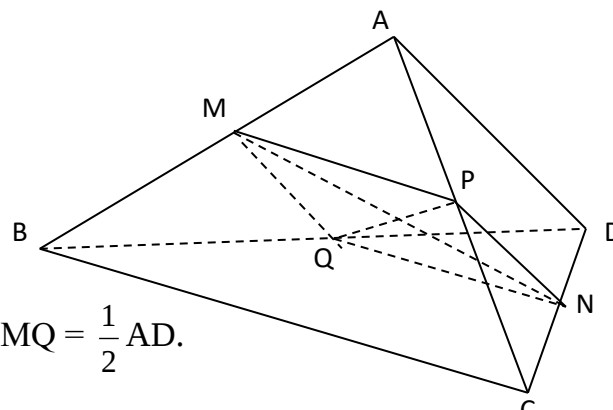


Ví dụ 6: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Giải

Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AC

và BD. Ta có PN song song với MQ và $PN = MQ = \frac{1}{2} AD$.



Vậy tứ giác MPNQ là hình bình hành. Mặt phẳng (MNPQ) chứa đường thẳng MN và song song với các đường thẳng AD và BC.

$\Rightarrow$ Ba đường thẳng MN, AD, BC cùng song song với một mặt phẳng. Do đó ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

2.3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Định lý 1: Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists! m, n \in \mathbb{R} : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

- **Nhận xét:** Nếu $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong 3 số $m, n, p \neq 0$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Ví dụ 7: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P và Q sao cho $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

Do đó, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ (1)

Mặt khác, vì $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ nên $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$,

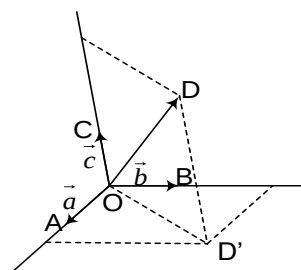
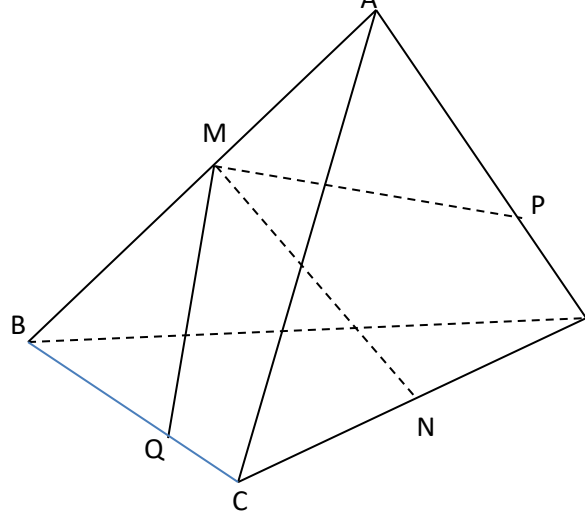
$\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BQ}$.

Do đó từ (1) ta suy ra: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}) = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ})$.

$$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}) \text{ vì } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}.$$

Hệ thức $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MQ}$ chứng tỏ ba vector $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng nên bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng

Định lý 2: Trong không gian cho ba vector không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó với mọi vector $\vec{x}$ ta đều tìm được bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.



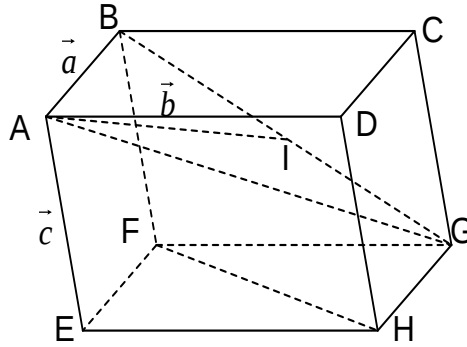
Ví dụ 8: Cho hình hộp ABCD.EFGH có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của đoạn BG. Hãy biểu thị vector $\overrightarrow{AI}$ qua ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Giải

Vì I là trung điểm của đoạn BG nên ta có $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG})$

trong đó $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Suy ra $\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



BÀI TẬP

1/ Cho tứ diện ABCD.

- Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. G là trọng tâm tứ diện.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

- Chứng minh rằng với mọi điểm M ta đều có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

2/ Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$;
- $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$;
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.

3/ Cho hình bình hành ABCD. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa hình bình hành.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

4/ Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:

- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$;
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$;

5/ Cho hình tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E, F sao cho:

- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$;
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$;

6/ Cho hình tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}.$$

7/ Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

$$a) \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

$$b) \quad \overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$$

8/ Cho hình lăng trụ tam giác ABCDA'B'C'D' có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Hãy phân tích (hay biểu thị) các vector $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

9/ Cho hình hộp ABCDEFGH. Gọi K là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của BH và DF. Chứng minh ba vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

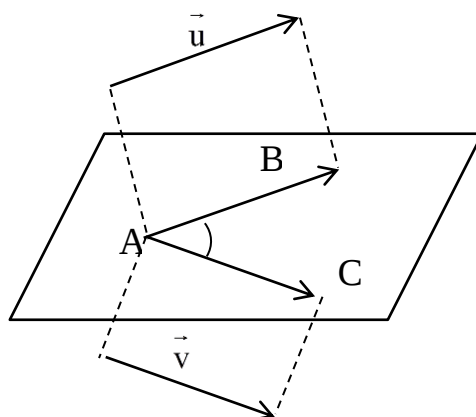
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1.1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian cho $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó: $(\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{BAC}$.

Chú ý: $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.



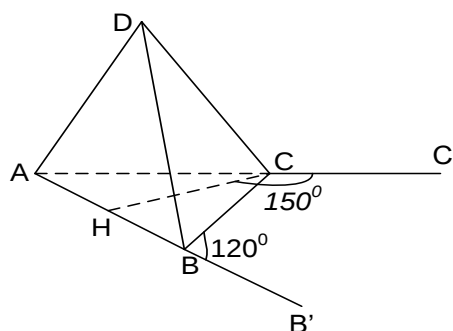
Ví dụ 1: Cho tứ diện đều ABCD có H là trung điểm của cạnh AB. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$

Giải

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{B'BC} = 120^\circ$



b) $(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{HCC'} = 150^\circ$

2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Định nghĩa: Cho $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

- *Qui uốc:* $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ thì: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Nhận xét

- $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2}$
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ví dụ 2: Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = OB = OC = 1. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính góc giữa hai vector $\vec{OM}$ và $\vec{BC}$.

Giải

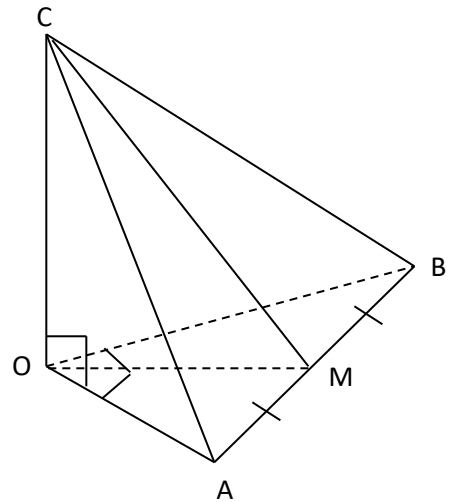
$$\text{Ta có: } \cos(\vec{OM}, \vec{BC}) = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{BC}}{|\vec{OM}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{BC}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } \vec{OM} \cdot \vec{BC} &= \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{OA} \cdot \vec{OC} - \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OB} \cdot \vec{OC} - \vec{OB}^2). \end{aligned}$$

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc và OB = 1 nên

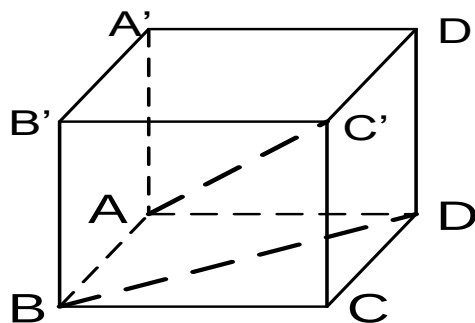
$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0 \text{ và } \vec{OB}^2 = 1.$$

$$\text{Do đó: } \cos(\vec{OM}, \vec{BC}) = \frac{-1}{2}. \text{ Vậy } (\vec{OM}, \vec{BC}) = 120^\circ.$$



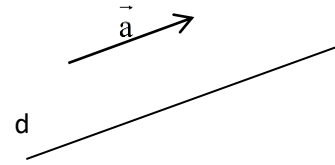
Ví dụ 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

- Hãy phân tích các vector $\vec{AC'}$ và $\vec{BD}$ theo ba vector $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}$.
- Tính $\cos(\vec{AC'}, \vec{BD})$ và từ đó suy ra $\vec{AC'}$ và $\vec{BD}$ vuông góc với nhau.



2. VECTOR CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

2.1 Định nghĩa: Vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vector $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d .



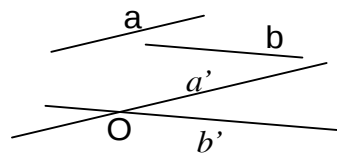
2.2. Nhận xét

- a) Nếu $\vec{a}$ là VTCP của đường thẳng d thì vector $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là VTCP của d .
- b) Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết điểm A thuộc d và một vector chỉ phương $\vec{a}$ của nó.
- c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vector chỉ phương cùng phương.

3. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

3.1 Định nghĩa: Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b . Kí hiệu: (a, b) .

Chú ý: $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$



3.2. Nhận xét

- a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.
- b) Nếu a có VTCP là $\vec{u}$ và b có VTCP là $\vec{v}$ thì

$$(a, b) = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha & \text{nếu } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \end{cases}$$

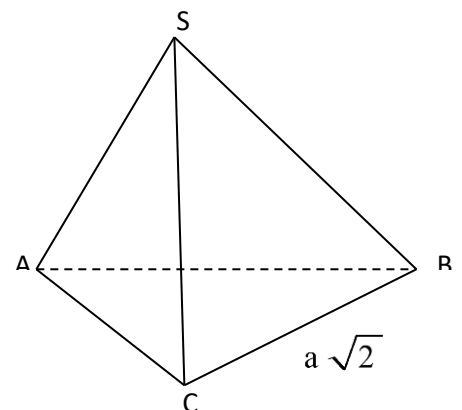
- c) Nếu $\begin{cases} a \parallel b \\ a \equiv b \end{cases}$ thì $(a, b) = 0^\circ$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

Tính $(AB, SC) = ?$

Giải

Ta có: $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}$



$$= \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{a \cdot a}$$

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2}$$

Vì $CB^2 = (a\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 = AC^2 + AB^2$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Tam giác SAB đều nên $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$

và do đó $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = \frac{-a^2}{2}$. Vậy: $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\frac{-a^2}{2}}{a^2} = \frac{-1}{2}$. Do đó $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$.

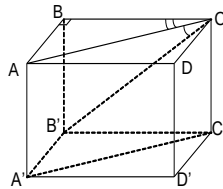
Suy ra $(AB, SC) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Ví dụ 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây:

a) AB và $B'C'$

b) AC và $B'C'$

c) $A'C'$ và $B'C'$



4. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

4.1. Định nghĩa: $a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 90^\circ$

4.2. Nhận xét

a) $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

b) $a \parallel b, c \perp a \Rightarrow c \perp b$

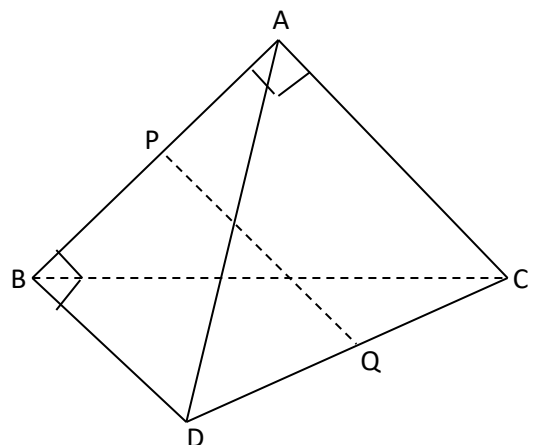
c) $a \perp b \Rightarrow a, b$ cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ 6: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$

Do đó $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.



$$\text{Vậy } 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ hay } AB \perp PQ.$$

BÀI TẬP

1/ Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vector sau đây:

- a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$; b) $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$; c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$.

2/ Cho tứ diện ABCD.

- a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
 b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

3/ Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' , $C'A$. Chứng minh rằng:

- a) $AB \perp CC'$;
 b) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

4/ Cho hình chóp tam giác S.ABC có $SA = SB = SC$ và có $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA$.

Chứng minh rằng $SA \perp BC, SB \perp AC, SC \perp AB$.

5/ Trong không gian cho hai hình vuông ABCD và $A'B'C'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O' . Chứng minh rằng $AB \perp OO'$ và tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

6/ Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và $\angle BAC = \angle BAD = 60^\circ$. Chứng minh rằng:

- a) $AB \perp CD$
 b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

7/ Cho S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

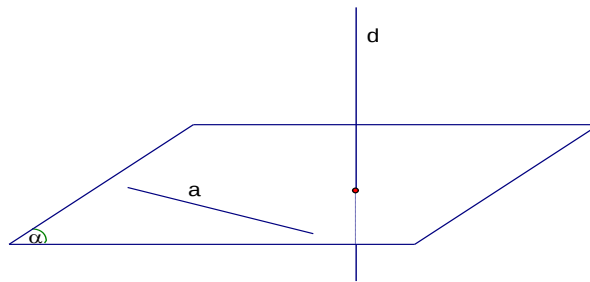
$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) .

Kí hiệu: $d \perp (\alpha)$. Hình vẽ minh họa:



2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

2.1. Định lý: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy. Tức là:

$$\begin{cases} d \perp a \\ a \subset (\alpha) \\ d \perp b \\ b \subset (\alpha) \\ a \text{ cắt } b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$

2.2. Hệ quả: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

3. Tính chất:

3.1. Tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

3.2. Mặt phẳng trung trực: Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng đi qua trung điểm của một đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

3.3. Tính chất 2: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

4. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.

4.1. Tính chất 1:

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

4.2. Tính chất 2:

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

4.3. Tính chất 3:

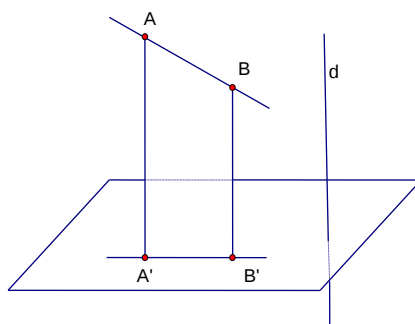
a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

5. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÝ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC.

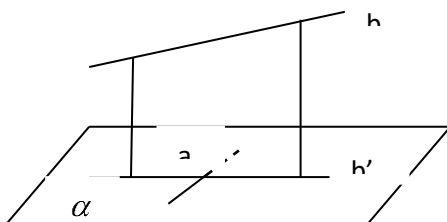
5.1. Phép chiếu vuông góc

Phép chiếu song song theo phương d vuông góc với (α) gọi là phép chiếu vuông góc trên mặt phẳng (α) .



5.2. Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) và không vuông góc với (α) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α) . Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.



5. 3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa: Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên (α) là góc giữa d và (α) . Nếu góc này bằng 90° thì $d \perp (\alpha)$.

Chú ý: Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

6. Các dạng toán thường gặp

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Phương pháp chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) :

- Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) .

$$\left. \begin{array}{l} d \perp a \\ d \perp b \\ a, b \subset (P) \\ a \cap b = I \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (P)$$

- Chứng minh đường thẳng d song song với đường thẳng b mà đường thẳng b vuông góc với (P) .

$$\left. \begin{array}{l} d // b \\ b \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (P)$$

- Chứng minh đường thẳng d vuông góc với (Q) mà $(P) // (Q)$.

$$\left. \begin{array}{l} (P) // (Q) \\ d \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (P)$$

Dạng 2: Chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b (có thể sử dụng hai phương pháp sau).

Phương pháp 1:

- Tìm mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a sao cho việc chứng minh $b \perp (P)$ dễ dàng.

$$\left. \begin{array}{l} a \subset (P) \\ b \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp a$$

- Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

a không vuông góc với (P) , $b \subset (P)$, a' là hình chiếu của a trên (P) . Khi đó,

$$b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$$

Dạng 3: Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Cách tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P)

+ Xác định hình chiếu của a lên mặt phẳng (P) .

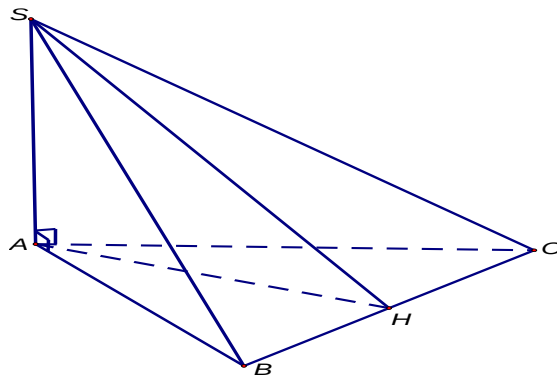
+ Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và hình chiếu của đường thẳng a lên mặt phẳng (P) .

*Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không quá 90° .

7. Bài Tập áp dụng

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a , cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi H là trung điểm BC .

- Chứng minh: $BC \perp (SAH)$.
- Chứng minh: $BC \perp SH$.
- Tính góc giữa đường thẳng SH và mặt phẳng (ABC) .



Giải

a) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp BC \quad (1)$$

Tam giác ABC đều có H là trung điểm BC nên AH vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao $\Rightarrow AH \perp BC$ (2)

$$\begin{aligned} SA \cap AH &= \{A\} \\ SA, AH &\subset (SAH) \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có: $BC \perp (SAH)$

b) Ta có $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$

c) Ta có:

$$\left. \begin{aligned} SA &\perp (ABC) \\ AH &\subset (ABC) \end{aligned} \right\} \Rightarrow SA \perp AH$$

$\Rightarrow$ AH là hình chiếu của SH lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow$ Góc giữa SH và mặt phẳng (ABC) là góc giữa SH và AH bằng góc SHA .

Mặt khác $\triangle SAH$ vuông tại A do $SA \perp AH$ nên

$$\tan SHA = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow SHA = 45^\circ.$$

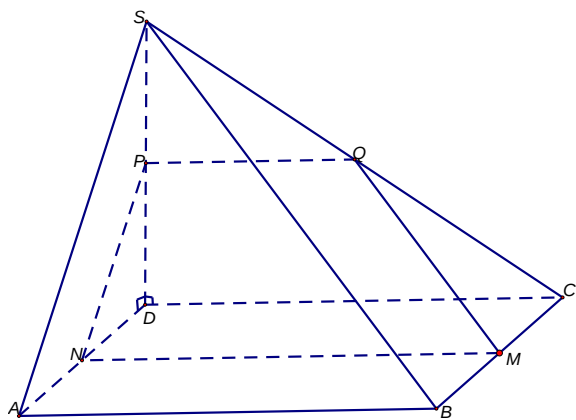
Vậy góc giữa SH và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và $SD \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh $AB \perp (SAD)$.

b) Gọi M là trung điểm BC, N là trung điểm của AD. Chứng minh: $MN \perp (SAD)$

Giải



a) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SD \perp (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SD \perp AB$$

$AB \perp AD$ (do ABCD là hình vuông)

$$\text{mặt khác } \begin{cases} SD, DA \subset (SAD) \\ SD \cap DA = \{D\} \end{cases}$$

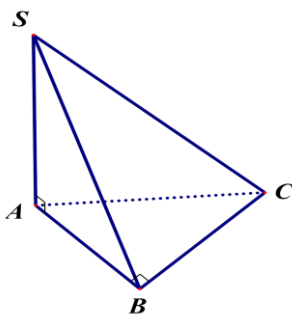
Vậy $AB \perp (SAD)$.

b) Vì $MN \parallel AB \perp (SAD) \Rightarrow MN \perp (SAD)$.

Bài tập 3: Cho S.ABC có các tam giác SAB, SAC vuông tại A; tam giác ABC vuông tại B. Chứng minh:

a) $SA \perp (ABC)$.

b) $BC \perp (SAB)$.



Giải: (Hs tự giải)

BÀI TẬP

1/ Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

2/ Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

- a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI).
- b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

3/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

- a) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD);
- b) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

4/ Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O tới mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

- a) H là trực tâm của tam giác ABC;

$$b) \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

5/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD

sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh:

- a) $BD \perp SC$;
- b) $IK \perp (SAC)$.

6/ Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có tam giác ABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao

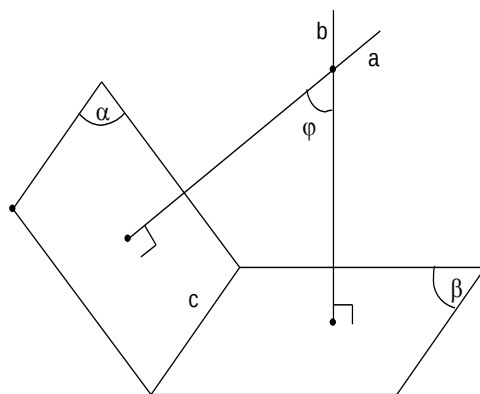
cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$;
- b) $SB \perp AN$.

§4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

1.1. Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

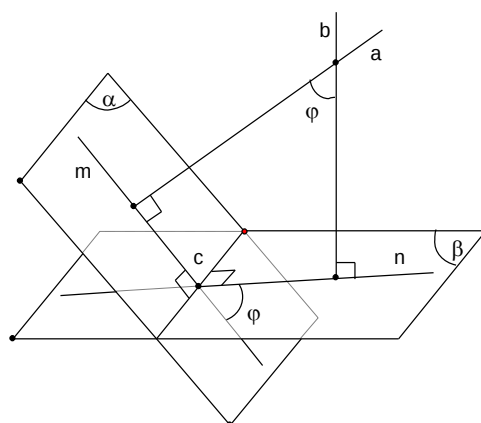


1.2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau.

Xét hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c .

Từ một điểm I bất kỳ trên c , trong mặt phẳng (α) dựng đường thẳng $m \perp c$ và dựng trong (β) đường thẳng $n \perp c$.

Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng m và n .



1.3. Diện tích hình chiếu của một đa giác.

Cho đa giác H nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích S và H' là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (β) . Khi đó diện tích S' của H' được tính theo công thức sau $S' = S \cdot \cos \varphi$ (φ là góc giữa (α) và (β)).

2. HAI MẶT PHẶNG VUÔNG GÓC

2.1. Định nghĩa: Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông. Kí hiệu: $(\alpha) \perp (\beta)$.

2.2. Các định lí

2.2.1. Định lí 1: Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} d \subset (\alpha) \\ d \perp (\beta) \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

Hệ quả 1: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

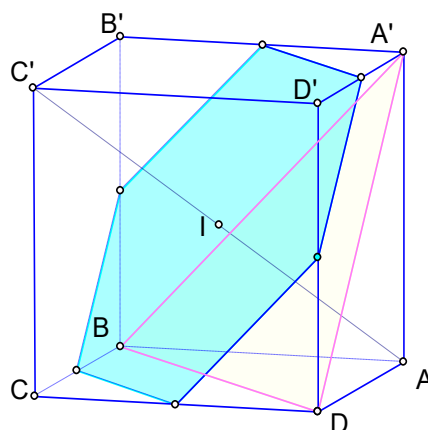
Hệ quả 2: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α) .

2.2.2. Định lí 2: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.

3. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

3.1. Định nghĩa: Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

- + Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều gọi là hình lăng trụ đều.
- + Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.
- + Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.
- + Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông gọi là hình lập phương.



3.2. Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đứng luôn vuông góc với mặt phẳng đáy và là những hình chữ nhật.

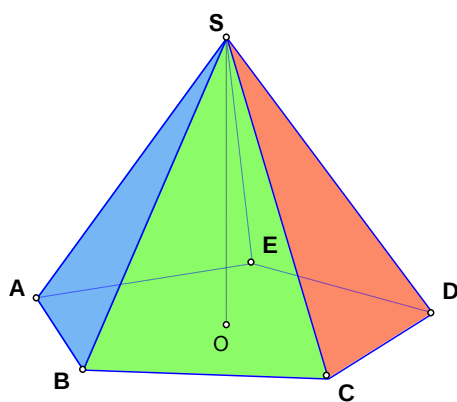
4. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

4.1. Hình chóp đều

Hình chóp có đáy là một đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy được gọi là hình chóp đều.

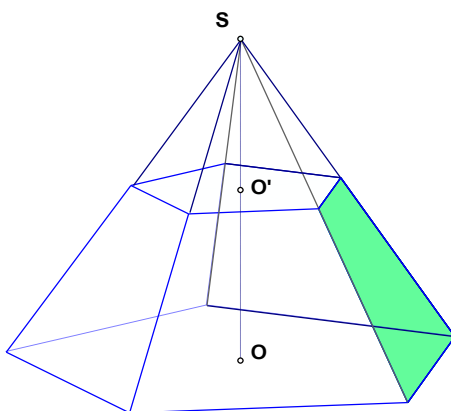
+ Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau, các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

+ Các mặt bên đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.



4.2. Hình chóp cụt đều

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.



5. Bài Tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $S.ABC$ có các tam giác SAB , SAC vuông tại A ; tam giác ABC vuông tại B . Chứng minh:

a) $(SAC) \perp (ABC)$

b) $(SBC) \perp (SAB)$

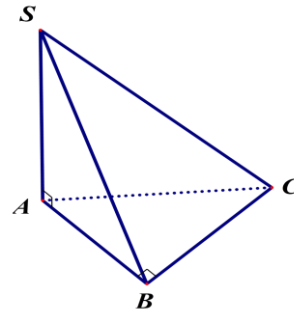
c) $(SAB) \perp (ABC)$

Giải:

a) Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (ABC).$

b) Ta có: $\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \perp (SAB).$

c) Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (ABC).$



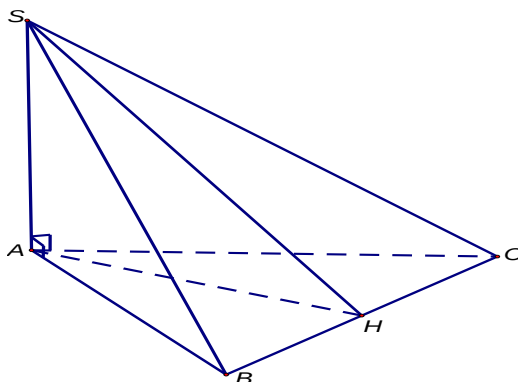
Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a. $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A. Gọi H là trung điểm BC.

a) Chứng minh: $(SAH) \perp (ABC)$.

b) Chứng minh: $(SAH) \perp (SBC)$.

c) Tính góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

Giải



a) Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAH) \perp (ABC)$

b) Ta có : $\begin{cases} BC \perp (SAH) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \perp (SAH).$

c) Áp dụng cách xác định góc giữa hai mặt phẳng, ta có: Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là: $\widehat{SHA}$.

Mặt khác $\triangle SAH$ vuông tại A do $SA \perp AH$ nên

$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{a\sqrt{3}}} = 1 \Rightarrow \widehat{SHA} = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa SH và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

BÀI TẬP

1/ Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông góc ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng:

- $\widehat{ABC}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC);
- Mặt phẳng (ADB) vuông góc với mặt phẳng (BCD).

2/ Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

- Mặt phẳng $(A'B'C'D')$ vuông góc với mặt phẳng $(BCD'A')$;
- Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$.

3/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Chứng minh rằng:

- Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD);
- Tam giác SBD là tam giác vuông.

4/ Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có SH là đường cao. Chứng minh $SA \perp BC$ và $SB \perp AC$.

5/ Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

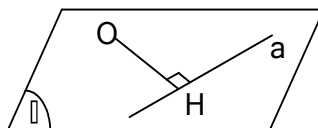
- Tính độ dài đoạn thẳng SO.
- Gọi M là trung điểm của đoạn SC. Chứng minh hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) vuông góc với nhau.
- Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

§5. KHOẢNG CÁCH

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, MỘT MẶT PHẪNG

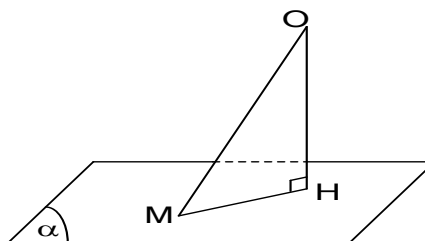
1.1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm O và đường thẳng a . Trong mặt phẳng (O, a) gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a . Khi đó khoảng cách OH được gọi là **khoảng cách từ O đến đường thẳng a** . Kí hiệu $d(O, a)$.

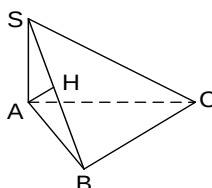


1. 2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho O và mặt phẳng (α) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mp (α) . Khi đó khoảng cách OH được gọi là **khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α)** . Kí hiệu $d(O, (\alpha))$.



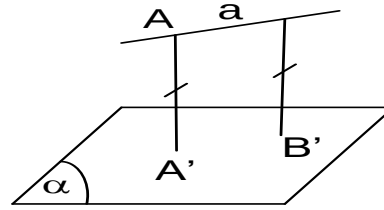
Ví dụ 1: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Giả sử $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .



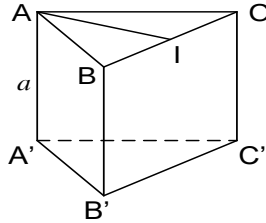
2. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG, KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG.

2.1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Định nghĩa: Cho $a \parallel (\alpha)$. Khoảng cách giữa a và mp (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến (α) . Kí hiệu $d(a, (\alpha))$.



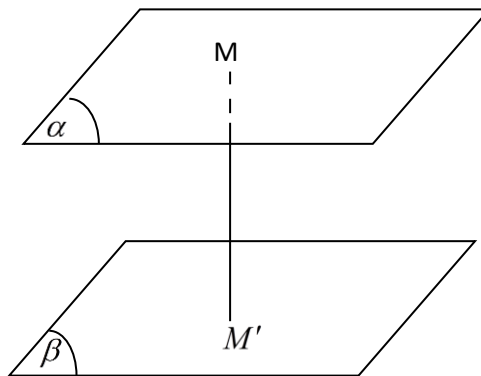
Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có $AA' = a$. Đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa AA' và $(BCC'B')$.



2.2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Định nghĩa: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) , (β) song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Kí hiệu khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau là $d((\alpha), (\beta))$

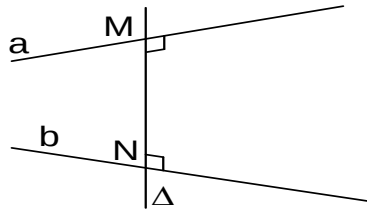


3. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

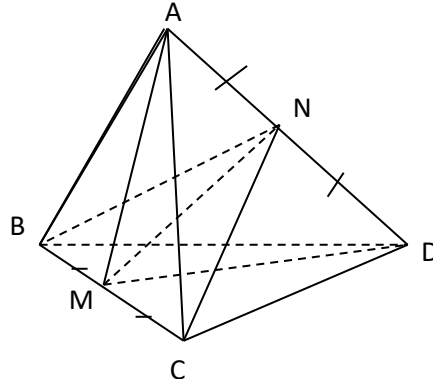
3.1. Định nghĩa

a) Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a , b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là *đường vuông góc chung của a và b* .

b) Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a , b lần lượt tại M , N thì độ dài đoạn MN gọi là *khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b* .



Ví dụ 3: Cho tứ diện đều ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và AD. Chứng minh rằng $MN \perp BC$ và $MN \perp AD$.

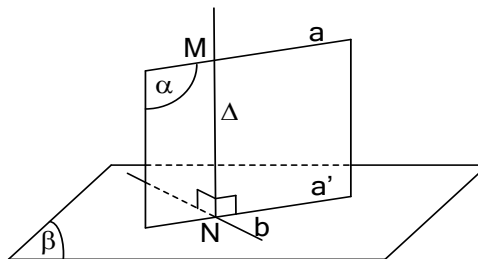


3.2. Cách tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Gọi (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a , (α) là hình chiếu vuông góc của a trên $m(\beta)$.

Vì $a \parallel (\beta)$ nên $a \parallel a'$. Do đó $b \cap a' = N$. Gọi mp (α) là mặt phẳng chứa a và a' , Δ là đường thẳng qua N và vuông góc với (β) . Khi đó $(\alpha) \equiv (a, a')$ vuông góc (β) .

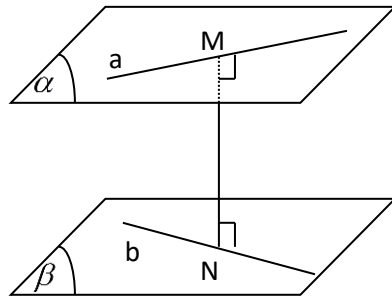
Như vậy Δ nằm trong (α) nên cắt a tại M và cắt tại b tại N , đồng thời Δ cùng vuông góc với cả a và b . Vậy Δ là đường vuông góc chung của a và b .



3.3. Nhận xét

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm trên đường thẳng này đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng kia.

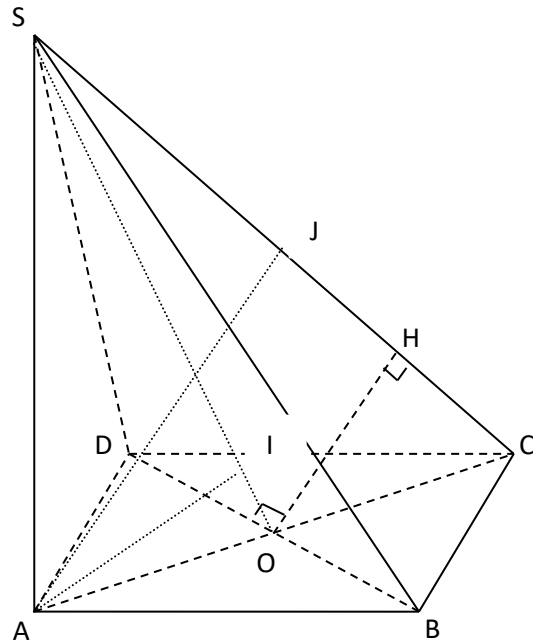
b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



4. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA \perp mp(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

- Tính khoảng cách từ C đến $mp(SAB)$.
- Tính khoảng cách từ A đến $mp(SBD)$.
- Tính khoảng cách từ CD đến $mp(SAB)$.
- Tính khoảng cách từ BC đến $mp(SAD)$.
- Tính khoảng cách giữa BC đến SA .
- Tính khoảng cách giữa BD đến SC .



Giải

- Ta có $CB \perp (SAB)$ tại B . Khoảng cách từ C đến (SAB) là: $CB = a$.
- Ta có $\begin{cases} BD \perp (SAO) \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$ theo giao tuyến SO . Từ A kẻ AI vuông góc với SO tại I . Khi đó: Khoảng cách từ A đến (SBD) là AI . Khi đó:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AI = a\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

- Ta có: $CD \parallel (SAB)$. Do đó, khoảng cách từ CD đến (SAB) là khoảng cách từ C đến (SAB) và bằng $CB = a$.
- Ta có: $BC \parallel (SAD)$. Do đó, khoảng cách từ BC đến (SAD) là khoảng cách từ B đến (SAD) và bằng $AB = a$.

e) Ta có: AB là đoạn vuông góc chung giữa BC và SA. Do đó, khoảng cách giữa BC và SA là $AB = a$.

f) Ta có: (SAC) chứa SC và vuông góc với BD tại O. Từ O kẻ $OH \perp SC$ tại H. Khi đó, OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD. Gọi AJ là đường cao của tam giác SAC, khi đó:

$$OH = \frac{1}{2} AJ. \text{ Vì } \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AJ = a. \text{ Vậy } OH = \frac{1}{2} a.$$

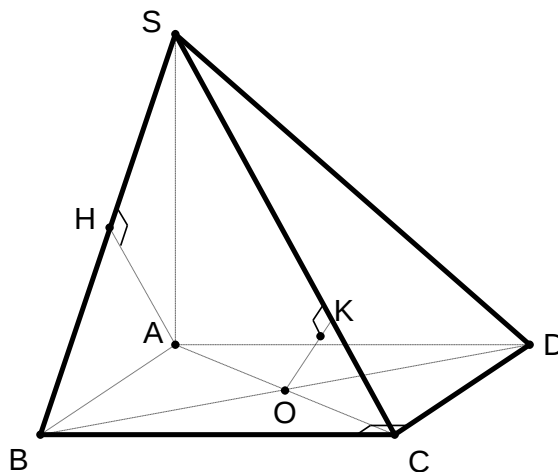
Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa các cặp đường thẳng sau:

a) SB và CD.

b) SC và BD.

c) SB và AD.

Giải: (HS tự giải)



BÀI TẬP

1/ Cho tứ diện S.ABCD có SA vuông góc với mp (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

- Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy.
- Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).
- Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

2/ Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ cạnh a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A' , B' , D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

3/ Cho hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' .

4/ Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$

- a) Chứng minh rằng $B'D$ vuông góc với mặt phẳng $(BA'C')$
- b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD') .
- c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' .

5/ Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung điểm hai cạnh AB và CD của tứ diện $ABCD$ là đường vuông góc chung của AB và CD thì $AC = BD$ và $AD = BC$.

6/ Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC) .

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 1

1/ Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và

$SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC, F là trung điểm của đoạn BE.

- Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC).
- Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

2/ Tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ADC nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = b$. Tam giác ADC vuông tại D có $CD = a$.

- Chứng minh các tam giác BAD và BDC là những tam giác vuông.
- Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

3/ Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ cạnh a.

- Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng $(A'B'CD)$.
- Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC' .

4/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

- Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD) và độ dài cạnh SC.
- Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABCD).
- Chứng minh $SB \perp BC$.
- Gọi φ là góc giữa 2 mp (SBD) và (ABCD). Tính $\tan \varphi$.